Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter IV
Übung

Betrachtet werden die gebrochen – rationalen Funktionen $f_d: x \mapsto f_d(x)$ mit

$$f_d(x) = \frac{dx^2+dx+2}{dx};\ d \in \mathbb{R} \text{ und } d \neq 0$$

in der von d unabhängigen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Ermitteln Sie die Art der Definitionslücke von f_d in Abhängigkeit von d. (2 BE)

b) Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen von f_d in Abhängigkeit von d. (7 BE)

c) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionen f_d dieselben Asymptoten besitzen. (3 BE)

d) Berechnen Sie d so, dass die Gerade mit der Gleichung $g: y = -2x - 5$ ($D_g = \mathrm{IR}$) Tangente an den Graphen der zugehörigen Funktion f_d ist. (6 BE)

Gebrochen – rationale Funktionen mit Parameter IV
Lösung

Hinweis: Bei f_d handelt es sich nicht etwa um einen Differentialquotienten, sondern lediglich um eine Funktion mit reellem Parameter d.

a) $z(0) = 2 \Rightarrow$ Polstelle 1. Ordnung bei $x = 0$.

b) $x_{1/2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 8d}}{2d}$

1. Fall: $d < 0$:	Zwei einfache Nullstellen
2. Fall: $0 < d < 8$:	Keine Nullstellen
3. Fall: $d = 8$	Eine doppelte Nullstelle bei $x_{1/2} = -\frac{1}{2}$
4. Fall: $d > 8$	Zwei einfache Nullstellen

c) Senkrechte Asymptote bei $x = 0$ (Polstelle 1. Ordnung)
Schräge Asymptote mit $y = x + 1$ (Polynomdivision)

d) Die Gleichung $\frac{dx^2 + dx + 2}{dx} = -2x - 5$ ergibt vereinfacht
$3dx^2 + 6dx + 2 = 0$
Damit die Gerade tatsächlich berührt, muss die Diskriminante $D = (6d)^2 - 4 \cdot 3d \cdot 2$ den Wert Null annehmen: $36d\left(d - \frac{2}{3}\right) = 0$.
Der Wert $d_1 = 0$ ist in der Angabe ausgeschlossen, bleibt als Lösung $d_2 = \frac{2}{3}$.